**Olimpiadi della mateamtica**
**Varese**

*Il problema della settimana*

Determinare tutti i valori $m$, $n$, $p$ tali che $p^n + 144 = m^2$, dove $m$ ed $n$ sono interi positivi e $p$ è un numero primo.

**Soluzione.** Per prima cosa ricordiamo il seguente teorema:

**Teorema.** Se il numero $p$, primo, divide il prodotto $ab$, con $a$, $b$ interi, allora: o $p$ divide $a$ oppure $p$ divide $a$.

Riscriviamo la relazione precedente nel seguente modo:

$$p^n = m^2 - 144 = (m - 12)(m + 12).$$

Utilizzando il teorema precedente richiamato possiamo dire che:

$$\begin{cases} p^\alpha = m - 12 \\ p^\beta = m + 12 \\ \alpha + \beta = n \end{cases} .$$

Dovrà risultare anche $\beta > \alpha$, dato che il primo numero deve essere maggiore del secondo. Sottraendo le prime due equazioni otteniamo:

$$p^\beta - p^\alpha = 24,\ p^\alpha(p^{\beta-\alpha} - 1) = 24.$$

Il numero $p^\alpha$ deve essere un divisore di 24. I divisori interi sono di 24:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24,$$

ma essendo 6, 12, 24 non potenze di numeri primi non possono essere utilizzati.

Imponendo $p^\alpha$ uguale ad uno dei divisori rimanenti, otteniamo:

1. $p^\alpha = 1$. Valido per ogni intero $p$ e $\alpha = 1$. Deve risultare: $p^{\beta-0} - 1 = 24$, dalla quale otteniamo $p^\beta = 25$. Tale equazione è soddisfatta per $p = 5$, $\beta = 2$. In questo caso la terna $(p,\ n,\ m)$ soluzione è $(5,\ 2,\ 13)$.

2. $p^\alpha = 2$, valida per $p = 2$ e $\alpha = 1$. Imponendo questa condizione otteniamo: $2^{\beta-1} - 1 = 12$, che non ammette soluzioni.

3. $p^\alpha = 3$, valida per $p = 3$ e $\alpha = 1$. In questo caso otteniamo: $3^{\beta-1} - 1 = 8$, dal quale ricaviamo: $3^{\beta-1} = 9$, quindi $\beta - 1 = 2$, $\beta = 3$. La terna soluzione è (3, 4, 15).

4. $p^\alpha = 4$, valida per $p = 2$ e $\alpha = 2$. Otteniamo, imponendo la seconda condizione: $2^{\beta-1} - 1 = 6$, che non ammette soluzioni.

5. $p^\alpha = 8$, valida per $p = 2$ e $\alpha = 3$. In questo caso risulta: $2^{\beta-3} - 1 = 3$, che permette di determinare: $\beta = 5$- La terna soluzione è (2, 8, 20).

Quindi le terne soluzione sono le seguenti:

$$(5,\ 2,\ 13),\ (3,\ 4, 15),\ (2,\ 8, 20).$$