

### Soluzione

Iniziamo con due domande:

*Il numero:*

$$N_1 = 1457828837654098873218172664659923877746326186545528873621666987665412009128$$

*è il quadrato di un numero intero?*

*Il numero:*

$$N_2 = 9847987299928837291875475928374747982777399283727227271999847576762399847239$$

*è il quadrato di un numero intero dispari?*

Le domande sembrano di difficile soluzione, ma, come vedremo nel seguito la risposta è pressoché immediata, dopo aver fatto alcune considerazioni.

Iniziamo con lo scrivere una tabella, nella quale scriveremo i primi 10 numeri interi ed i loro quadrati.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Dato che un numero intero  $N$  si può scrivere sempre nel seguente modo:  $N = 10x + y$ , con  $y$  cifra delle unità. Elevando al quadrato otteniamo che  $N^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$ , quindi la cifra delle unità del numero  $N^2$  coincide con la cifra delle unità del numero  $y^2$ . Questo fatto ci permette di effettuare una semplice considerazione: un numero intero è un quadrato di un altro numero intero se risulta terminare per una delle seguenti cifre: 0, 1, 4, 9, 6, 5.

Possiamo giungere a questo risultato rileggendo opportunamente la tabella prima scritta.

Quindi il numero  $N_1$  non può essere il quadrato di un numero intero, dato che termina per 8.

Passiamo ora alla soluzione del problema che era stato proposto.

Per quanto detto in precedenza possiamo dire che se il numero  $N^2$  è composto solo da cifre dispari, allora deve essere dispari anche la cifra finale del quadrato di  $y^2$ , questo ci porta a dire che i possibili valori di  $y$  sono: 1, 3, 5, 7, 9.

Distinguiamo due casi:

(1)  $y^2$  è composto da una sola cifra.

In questo caso  $y$  può essere solo 1 o 3. Dalla scrittura prima data del numero  $N$  possiamo dire che la cifra delle unità è dispari, passiamo ora ad esaminare la cifra delle decine. In questo caso la cifra delle decine è data dalla cifra delle unità del numero  $2xy$ , per ovvi motivi tale cifra sarà sempre una cifra pari. Quindi non ci sono numeri, diversi da 1 e 3, il cui quadrato è composto solo da cifre dispari e che terminano per 1 e 3.

(2)  $y^2$  è composto da due cifre.

Possiamo dire che  $y$  può assumere uno dei seguenti valori: 5, 7, 9. Se scriviamo i quadrati di tali numeri come  $a * 10 + b$ , possiamo dire che  $a$  è sempre un numero pari, questo ci permette di concludere che la cifra delle decine di  $N^2$  sarà sempre un numero pari perché potendosi scrivere come:  $2xy + a$ , ovvero come somma di numeri pari, terminerà per un numero pari.

Questo ci permette di dire che  $y$  non potrà mai essere una di tali cifre.

Concludendo: se un numero è pari, il suo quadrato è pari (quindi contiene almeno una cifra pari), e possiamo dire che non troveremo alcun numero pari il cui quadrato è composto solo da cifre dispari. Se un numero è dispari dobbiamo distinguere due casi  $N = 1$  o  $N = 3$ , in tale caso il quadrato è composto da cifre dispari;

oppure  $N$  dispari diverso dai due numeri precedenti, in questo caso il quadrato avrà sicuramente la cifra delle decine che è una cifra pari, quindi non ci sono numeri dispari di questo tipo che soddisfano la condizione richiesta.

Le osservazioni fatte ci permettono anche di concludere che il numero  $N_2$  non può essere un quadrato di alcun numero in quanto ha le ultime due cifre dispari, mentre abbiamo dimostrato che un numero intero dispari che risulta essere un quadrato deve avere l'ultima cifra dispari e la penultima cifra pari.