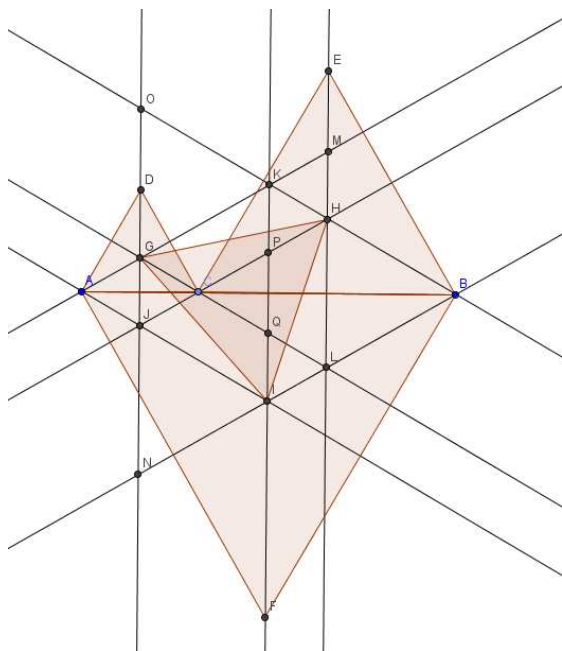


Questa volta invio la soluzione del primo problema e le soluzioni che mi sono pervenute del secondo e del terzo.

1. Per ognuno dei triangolo ACD , CBE e ABF si costruiscono gli assi, siano (AG, CH, IB) , (CG, BH, AI) , e (DG, EH, FI) . Gli assi sono stati scritti raggruppati in tale modo, perché è immediato verificare che le tre terne sono costituite da rette parallele. Il quadrilatero $GJIQ$ è un parallelogramma, infatti i lati opposti appartengono a rette parallele, quindi risulta $GJ \cong QI$ e $JI \cong GQ$. In modo analogo possiamo anche dimostrare che risultano parallelogrammi i quadrilateri: $GJKP$ e $JCLI$. È possibile dimostrare, considerando ad esempio gli assi AG e GC dello stesso triangolo, che l'angolo $J\hat{G}C$ ha ampiezza 60° e che risulta di 60° anche l'angolo $G\hat{C}J$, formato dagli assi GC e GJ di due triangoli equilateri diversi. Quindi possiamo concludere che il triangolo $G\hat{C}J$ è un triangolo equilatero. Una tale dimostrazione può anche essere utilizzata per dimostrare che risultano equilateri i triangoli KHM e QIL . Per quanto ricordato prima ($GJIQ$ e $GJHM$ quadrilateri) possiamo concludere che risultano congruenti i segmenti: $GJ \cong IL \cong KH$. In modo analogo al precedente si può dimostrare che risultano congruenti i segmenti: $JI \cong HL \cong KG$. Notiamo ora che gli angoli $G\hat{J}I$, $I\hat{L}H$ e $G\hat{K}H$, hanno tutti ampiezza 120° , quindi i triangoli GKH , GJI e ILH sono tutti congruenti e risultano congruenti anche i lati corrispondenti: GI, IH, HG . Possiamo quindi concludere che risulta equilatero il triangolo GHI



2. (le soluzioni degli ultimi due problemi è stata inviata da Giulio Colomb del Liceo Scientifico di Busto A.).

Il risultato finale è il prodotto di tutti i numeri dispari compresi tra 7 e 2001 inclusi. Poiché tra essi si trovano anche dei multipli di 5, il risultato deve essere un multiplo di 5, e quindi la cifra delle unità deve essere uguale a 5 o a 0. Dato che tra i fattori non ci sono numeri pari, il risultato finale è dispari e quindi la cifra delle unità è 5.

3. x^2 e y^2 sono interi positivi, in quanto quadrati di interi; nessuno dei due è nullo, poiché nessun quadrato di un numero intero è pari a 2009; $x^2 > y^2$, poiché la differenza è un numero positivo, e quindi $|x| > |y|$. x e y , però, non sono necessariamente positivi; si possono verificare questi quattro casi: x e y entrambi positivi, x e y entrambi negativi, x positivo e y negativo, x negativo e y positivo. Tenendo conto del fatto che:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2009, \quad 2009 = 72 \cdot 41$$

verifichiamo i possibili valori di x e y in ognuno dei quattro casi

Iniziamo ipotizzando che x e y siano positivi: ne segue che $(x - y) < (x + y)$, e quindi i possibili valori di $((x - y); (x + y))$ sono $(1; 2009)$, $(7; 287)$ e $(41; 49)$. Nel primo caso abbiamo $x = 1005$ e $y = 1004$; nel secondo $x = 147$ e $y = 140$; nel terzo $x = 45$ e $y = 4$.

Ipotizziamo ora che x e y siano negativi: ne segue che $(x - y) > (x + y)$, e quindi i possibili valori di $((x - y); (x + y))$ sono $(-1; -2009)$, $(-7; -287)$ e $(-41; -49)$. Nel primo caso abbiamo $x = -1005$ e $y = -1004$; nel secondo $x = -147$ e $y = -140$; nel terzo $x = -45$ e $y = -4$.

Ipotizziamo ora che x sia positivo e y sia negativo: ne segue che $(x - y) > (x + y)$ e che $(x - y)$ e $(x + y)$ sono entrambi positivi. I possibili valori di $((x - y); (x + y))$ sono quindi $(2009; 1)$, $(287; 7)$ e $(49; 41)$. Nel primo caso abbiamo $x = 1005$ e $y = -1004$; nel secondo $x = 147$ e $y = -140$; nel terzo $x = 45$ e $y = -4$.

Ipotizziamo infine che x sia negativo e y sia positivo: ne segue che $(x - y) < (x + y)$ e che $(x - y)$ e $(x + y)$ sono entrambi negativi. I possibili valori di $((x - y); (x + y))$ sono quindi $(-2009; -1)$, $(-287; -7)$ e $(-49; -41)$. Nel primo caso abbiamo $x = -1005$ e $y = 1004$; nel secondo $x = -147$ e $y = 140$; nel terzo $x = -45$ e $y = 4$.

Le coppie di interi $(x; y)$ per le quali vale $x^2 - y^2 = 2009$ sono quindi: $(1005; 1004)$, $(147; 140)$, $(45; 4)$, $(-1005; -1004)$, $(-147; -140)$, $(-45; -4)$, $(1005; -1004)$, $(147; -140)$, $(45; -4)$, $(-1005; 1004)$, $(-147; 140)$, $(-45; 4)$.