Olimpiadi della mateamtica
Varese

Il problema della settimana

1. Sia $A = \{1, 2, 3, \cdots, 31, 32, 33\}$, l'insieme dei primi 33 numeri interi. É possibile suddividere l'insieme A in 11 sottoinsiemi di tre elementi ciascuno tali che la somma di due elementi di questo sottoinsieme è uguale al terzo elemento? In caso di risposta affermativa determinare una tale suddivisione, altrimenti mostrare che non è possibile.

   Soluzione. Consideriamo un qualsiasi sottoinsieme che soddisfi le condizioni richieste, indichiamo con a, b, c i tre numeri che lo compongono. Tali numeri soddisfano la condizione: $a+b=c$, allora deve anche risultare: $a+b+c=c+c=2c$, quindi, comunque si scelgano gli elementi di un sottoinsieme la loro somma deve essere un numero pari. Deve risultare pari anche la somma di tutti i numeri appartenenti all'insieme A, dato che tale somma può essere anche vista come somma di 11 numeri pari, ma se calcoliamo la somma dei numeri che compongono l'insieme A otteniamo: $1+2+\cdots+32+33 = \dfrac{33 \cdot 34}{2} = 571$, che è dispari. Quindi una suddivisione di A come richiesto nel problema non è possibile.

2. Sono dati n punti nel piano, siano $P_1, P_2, \cdots, P_n$, tali che data una qualsiasi terna di punti ne esiste almeno una avente distanza minore o uguale ad un numero r fissato.

   Mostrare che esistono due cerchi di raggio r la cui unione contiene tutti i punti dell'insieme assegnato.

   Soluzione. Dato il punto P_1 indichiamo con A l'insieme di tutti i punti dell'insieme iniziale che hanno distanza da P_1 minore oppure uguale a r, indichiamo con B l'insieme dei punti rimanenti.

   Se $B = \emptyset$ il problema è risolto: l'insieme A è contenuto nel cerchio di centro P_1 e raggio r, mentre un qualsiasi altro cerchio di raggio r soddisfa la tesi. Se B non è vuoto, allora esiste almeno un punto P_k che appartiene a tale insieme. Se prendiamo una qualsiasi terna del tipo: P_1, P_k, P_j, se P_j appartiene ad A allora risulta minore o uguale a r la distanza tra P_1, se P_j appartiene a B risultano maggiori di r le distanze tra i punti P_1, P_j e P_1, P_k sono maggiori di r, quindi, per l'ipotesi fatta, deve risultare minore o uguale a r la distanza P_k, P_j. Possiamo quindi concludere che i punti dell'insieme A

sono tutti contenuti nel cerchio di centro P_1 e raggio r, mentre i punti dell'insieme B sono tutti contenuti nel cerchio di centro P_k e raggio r, c.v.d.