Olimpiadi della mateamtica
Varese

Il problema della settimana

1. Calcolare la seguente somma:

$$\sum_{n=0}^{90} \sin^2 n^\circ.$$

Soluzione. Notiamo che la somma iniziale si può scrivere nel seguente modo:

$$\sum_{n=0}^{90} \sin^2 n^\circ = \sum_{n=0}^{44} \sin^2 n^\circ + \sin^2 45^o + \sum_{n=46}^{90} \sin^2 n^\circ =$$

$$= \sum_{n=0}^{44} \sin^2 n^\circ + \sin^2 45^o + \sum_{n=0}^{44} \sin^2(90^o - n^\circ) =$$

$$= \sum_{n=0}^{44} \sin^2 n^\circ + \sin^2 45^o + \sum_{n=0}^{44} \cos^2 n^\circ = \sum_{n=0}^{44}(\sin^2 n^\circ + \cos^2 n^\circ) + \frac{1}{2} = 45 + \frac{1}{2} = \frac{91}{2.}$$

2.
   - Mostrare che esistono infiniti numeri interi che non possono essere scritti quale differenza di due quadrati perfetti.
   - Mostrare che la somma dei cubi di tre numeri consecutivi si può scrivere come differenza di due quadrati perfetti.

Soluzione. La dimostrazione procederà per esclusione dei numeri interi che si possono scrivere come differenza dei quadrati di due numeri interi, i numeri rimanenti costituiscono, come vedremo, un insieme infinito. Sia $N = (a^2 - b^2)$, possiamo scrivere $N = (a-b)(a+b)$, con $a > b$. Risulta: $a - b < a + b$.

Se esistono tali numeri, $(a - b$ e $(a + b)$ dovranno essere dei divisori di N.

Due possibili divisori di N sono N e 1, quindi otteniamo il seguente sistema,

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = N \end{cases}$$

che, se ammette soluzioni intere, permette di scrivere il numero iniziale come differenza di due quadrati.

Tale sistema ha per soluzioni:

$$\begin{cases} a = \dfrac{N+1}{2} \\ b = \dfrac{N-1}{2} \end{cases}$$

i valori a e b sono interi se e solo se N è dispari. Quindi per ogni N dispari è possibile scrivere N come differenza di due numeri interi.

Ammettiamo ora che $N = 2k$ sia un numero pari. Il sistema precedente non ammette soluzioni intere, una nuova copia di divisori è la coppia 2 e k. Possiamo scrivere ora il nuovo sistema:

$$a - b = 2a + b = k$$

che ammette quale soluzione:

$$\begin{cases} a = \dfrac{2+k}{2} \\ b = \dfrac{2-k}{2} \end{cases}$$

Il sistema ammette soluzioni intere se e solo se k è pari.

Consideriamo ora i numeri $N = 2p$ con p numero primo, le uniche coppie di divisori interi sono $(1, N)$ e $(2, p)$, che permettono di scrivere i due sistemi scritti in precedenza. Tali sistemi, in entrambi i casi, non ammettono soluzione in quanto N è pari e p è dispari e primo. Quindi possiamo concludere che tutti i numeri della forma $N = 2p$, con p primo dispari, non possono essere scritti come differenza di due quadrati, come richiesto nell'enunciato.

Dato un numero intero positivo $\alpha > 1$, tre numeri interi consecutivi possono essere scritti nel seguente modo: $(\alpha - 1)$, α, $(\alpha + 1)$.

Detta S la somma cercata, con facili conti si verifica che $S = 3\alpha(\alpha^2 + 2)$.

Distinguiamo ora due casi:

(a) α dispari. S è dispari, quindi utilizzando quanto dimostrato in precedenza possiamo concludere che la tesi vale.

(b) α pari. Possiamo scrivere $\alpha = 2k$, con $k > 1$ intero, $S = 6k(4k^2 + 2)$.
Notiamo che se $k > 1$ allora $4k^2 + 2 > 6k$, quindi cerchiamo due numeri interi a e b che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} a - b = 6k \\ a + b = 4k^2 + 2 \end{cases}$$

che ammette le soluzioni intere: $a = 2k^2 + 3k - 1$ e $b = 2k^2 - 3k + 1$.

Quindi, in ogni caso, la proposizione è dimostrata.