Olimpiadi della mateamtica
Varese

Il problema della settimana

1. Siano a, b, c le radici dell'equazione:
$$x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0.$$
Calcolare:
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$
2. In un triangolo ABC si sa che l'angolo in A è il doppio dell'angolo in B. Dimostrare che $a^2 = b(b+c)$ dove a, b, c denotano le lunghezze dei lati opposti ad A, B, C, rispettivamente.

Soluzione 1. La prima cosa che possiamo provare è risolvere l'equazione, ma dato che le soluzioni sono (almeno così è quanto si ottiene con Derive):

$$a = -\sqrt[3]{\frac{137}{432} - \frac{\sqrt{2085}}{144}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2085}}{144} + \frac{137}{432}} + \frac{4}{3} + i\left(\sqrt[3]{\frac{137\sqrt{3}}{144} + \frac{\sqrt{695}}{16}} - \sqrt[3]{\frac{137\sqrt{3}}{144} + \frac{\sqrt{695}}{16}}\right)$$

$$b = -\sqrt[3]{\frac{137}{432} - \frac{\sqrt{2085}}{144}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2085}}{144} + \frac{137}{432}} + \frac{4}{3} - i\left(\sqrt[3]{\frac{137\sqrt{3}}{144} + \frac{\sqrt{695}}{16}} - \sqrt[3]{\frac{137\sqrt{3}}{144} + \frac{\sqrt{695}}{16}}\right)$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{137}{54} - \frac{\sqrt{2085}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2085}}{18} + \frac{137}{54}} + \frac{4}{3},$$

quindi risulta particolarmente difficile effettuare il calcolo richiesto.

Per poter risolvere il problema possiamo richiamare alcuni fatti che risultano particolarmente utili.

1. Data un'equazione di terzo grado del tipo: $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ed indicate con a, b, c le tre soluzioni, possiamo scrivere il polinomio iniziale nel seguente modo:
$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc.$$

2. Utilizzando quando prima scritto ed il principio di identità dei polinomi possiamo dire che vale la seguente relazione:

$$\begin{cases} \alpha = -(a+b+c) \\ \beta = ab+ac+bc \\ \gamma = -abc \end{cases}$$

Ritorniamo al problema iniziale. La somma richiesta si può anche scrivere nel seguente modo:

$$\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2b^2c^2}.$$

Calcoliamo ora: $(ab+ac+bc)^2$ ed esprimiamolo in funzione dei coefficienti dell'equazione.

$$(ab+ac+bc)^2 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2,$$

da questa relazione possiamo ricavare:

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = \frac{(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)}{2} = \frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{2}.$$

Il calcolo della somma richiesta quindi risulta molto semplice, otteniamo:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{2\gamma^2}.$$

Quindi nel nostro caso possiamo dire che la somma è:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{25-56}{49} = -\frac{31}{49}.$$

Soluzione 2.

Il triangolo ADB, con D punto comune alla retta BC ed alla bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$, è un triangolo isoscele, infatti gli angoli alla base sono congruenti.

L'angolo $C\hat{D}A$, angolo esterno del triangolo isoscele, è pari a $2D\hat{B}A = C\hat{A}B$, quindi i triangoli ABC e ADC sono simili, avendo i tre angoli ordinatamente congruenti.

Possiamo quindi calcolare la lunghezza del segmento AD sfruttando la seguente proporzione:

$$CB : AB = AC : AD,\ a : c = b : \overline{AD}.$$

Così otteniamo: $\overline{AD} = \overline{DC} = \dfrac{bc}{a}$.

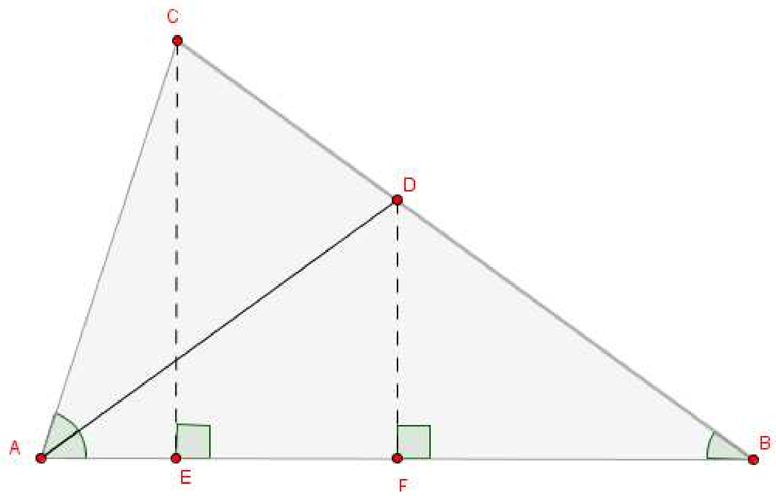
Notiamo ora che i triangoli CEB e DFB sono simili, in quanto retti e con un angolo in comune.

Calcoliamo ora la misura del segmento EB utilizzando la seguente proporzione:

$$CB : EB = DB : FB,\ a : \overline{EB} = \frac{bc}{a} : \frac{c}{2},$$

(il punto F è il punto medio del lato AB in quanto DF è l'altezza del triangolo isoscele ABD). Otteniamo:

$$\overline{EB} = \frac{a^2}{2b}.$$


C
D
A
E
F
B

La misura del segmento $\overline{AE} = c - \dfrac{a^2}{2b}$.
Calcoliamo la misura del segmento CE tramite i due triangoli ACE e CEB.

$$\overline{CE}^2 = b^2 - \left(c - \frac{a^2}{2b}\right)^2,$$

$$\overline{CE}^2 = a^2 - \frac{a^4}{4b^2}.$$

Uguagliando tali espressioni e svolgendo semplici calcoli, otteniamo:

$$4b^4 - 4b^2c^2 - a^4 + 4bca^2 = 4a^2b^2 - a^4;$$

$$b^2(b^2 - c^2) = a^2b(b - c);$$

$$b^2(b - c)(b + c) = a^2(b - c),$$

semplificando otteniamo:

$$b(b + c) = a^2.$$

Nota. É possibile effettuare la dimostrazione anche per via trigonometrica.