

Terne pitagoriche

Vogliamo determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Iniziamo con il notare che se (a, b, c) è soluzione dell'equazione risulta soluzione anche la terna (ka, kb, kc) , con $k \in \mathbb{N}$. Infatti se $a^2 + b^2 = c^2$, sostituendo gli elementi della seconda terna nell'equazione iniziale otteniamo: $k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2$, quindi anche questa seconda terna è soluzione dell'equazione iniziale.

Cerchiamo allora un metodo per determinare le terne (a, b, c) , tali che il MCD dei tre numeri sia pari a 1.

Iniziamo a considerare l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, tale equazione è $X^2 + Y^2 = 1$. Preso un punto sulla circonferenza, ad esempio $A(-1; 0)$, determiniamo le coordinate dei punti comuni ad una generica retta che passa per tale punto e la circonferenza assegnata.

Dato che l'equazione della generica retta passante per A ha equazione: $Y = m(X + 1)$, i punti comuni alle due curve si possono ottenere risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y = m(X + 1) \end{cases}.$$

Tale sistema ammette la soluzione fissa $A(-1; 0)$ e la soluzione variabile

$$P\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}; \frac{2m}{1 + m^2}\right).$$

Posto ora $m = \frac{p}{q}$ e sostituendo tale valore nelle coordinate del punto di partenza, otteniamo:

$$P\left(\frac{1 - \frac{p^2}{q^2}}{1 + \frac{p^2}{q^2}}; \frac{2\frac{p}{q}}{1 + \frac{p^2}{q^2}}\right) = \left(\frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}, \frac{2pq}{q^2 + p^2}\right).$$

La terna $(q^2 - p^2, 2pq, q^2 + p^2)$ è una terna pitagorica; al variare di p e q , con $q > p$, possiamo quindi determinare tutte le terne pitagoriche.