Area del segmento parabolico

Data una parabola, sia γ, ed una retta r che incontra la parabola in due punti, siano A e B, definiamo segmento parabolico la parte di piano delimitata dalla retta r e dall'arco AB di parabola.

Vogliamo determinare l'area di tale parte di piano utilizzando quanto visto in precedenza per il calcolo della somma di una serie geometrica.

Possiamo scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale riferire il piano in modo che l'equazione della parabola si possa scrivere nel seguente modo: $y = ax^2$. Basta infatti scegliere quale asse delle ordinate l'asse di simmetria della parabola e quale asse delle ascisse la retta tangente in V, vertice della parabola, alla stessa.

In questo sistema di riferimento le coordinate dei punti A e B sono rispettivamente: $A(\alpha; a\alpha^2)$ e $B(\beta; a\beta^2)$, con $\beta > \alpha$. Indichiamo con M il punto della parabola avente per ascissa il valore medio delle coordinate x dei punti A e B. Le coordinate di tale punto sono $M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}; a\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\right)$. Calcoliamo ora l'area del triangolo AMB. La misura del segmento AB è pari a $\overline{AB} = (\beta-\alpha)\sqrt{1+m_{AB}^2}$. Iniziamo a calcolare il coefficiente angolare della retta AB: $m_{AB} = a\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha} = a(\beta+\alpha)$. L'equazione della retta passante per A e B è: $y - a\alpha^2 = m_{AB}(x-\alpha)$. L'altezza del triangolo è:

$$h = \frac{\left|a\frac{(\alpha+\beta)^2}{4} - m_{AB}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) - a\alpha^2\right|}{\sqrt{1+m_{AB}^2}} = a\frac{(\beta-\alpha)^2}{2\sqrt{1+m_{AB}^2}}.$$

Quindi l'area del triangolo AMB è pari a:

$$A_T = \frac{a}{8}(\beta-\alpha)^3,$$

possiamo notare che l'area del triangolo dipende solo dalla differenza tra le coordinate x dei punti A e B, tale quantità verrà nel seguito indicata con $l = \beta-\alpha$. L'area del triangolo ABM quindi si può calcolare nel seguente modo: $A_T = \frac{a}{8}l^3$.

Ripetiamo le operazioni precedenti sui due nuovi archi di parabola AM e MB. Costruiamo su questi due nuovi archi dei triangoli iscritti nei segmenti parabolici che si vengono a costituire. L'area di ognuno di tale triangoli è pari a: $A_1 = \frac{a}{8}\left(\frac{l}{2}\right)^3$; il numero di triangoli è pari a 2, pari al doppio dei triangoli presenti in precedenza. Se consideriamo l'area complessiva della figura ottenuta calcolando l'area iniziale e le aree dei due nuovi triangoli è pari a:

$$A = A_T + 2\frac{A_T}{8} = A_T + \frac{A_T}{4}.$$

Notiamo quindi che ogni volta che operiamo in tale modo aggiungiamo un'area pari a $\frac{1}{4}$ dell'area precedente. Ripetendo tale operazione infinite volte otteniamo che:

$$A = A_T + \frac{A_T}{4} + \frac{A_T}{4^2} + \frac{A_T}{4^3} + \cdots + \frac{A_T}{4^n} + \cdots =$$

Notiamo, senza dimostrarlo, che l'insieme di tutti i triangoli prima definiti approssima per difetto l'area che stiamo cercando, e che l'area cercata si può vedere come la somma delle aree di tutti i triangoli così costruiti.

Quindi l'area cercata è pari a:

$$A = A_T \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots\right) = A_T \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = A_T \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} A_T = a\frac{l^3}{6}.$$