Progressioni aritmetiche e geometriche

Questa volta iniziamo in un modo diverso dal solito, con una barzelletta (matematica) che mi ha inviato Lu da Lodi. Se la capite probabilmente quello che indicherò in seguito non serve ... altrimenti leggete le note e alla fine potrete anche voi divertirvi.

Un numero infinito di matematici entra in un bar. Il primo ordina una birra. Il secondo ordina mezza birra. Il terzo ordina un quarto di birra. Continuano così finché il barista li ferma e dice: "siete una massa di idioti", e versa due birre.

Progressioni aritmetiche

Dati n numeri reali, a_1, $a_2, \cdots, a_n$, diremo che costituiscono una progressione geometrica se vale la seguente relazione:

$$d = a_{k+1} - a_k.$$

Noto il valore iniziale a_1 e il valore d è possibile facilmente determinare un qualsiasi elemento della progressione tramite la seguente formula:

$$a_k = a_1 + (k-1)d.$$

Infatti dalla relazione scritta in precedenza risulta:

$$a_{k+1} = a_k + d;$$

quindi otteniamo: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ e così via.

Una particolare progressione aritmetica è data dai primi n numeri interi: 1, $2, \cdots, n-1$, n. In questo caso $a_1 = 1$ e $d = 1$. Vogliamo calcolare la somma dei primi n termini di tale progressione, per fare ciò possiamo procedere come segue:

1. n **è pari**. Dividiamo l'insieme dei numeri in due sottoinsiemi, quelli minori o uguali a $\frac{n}{2}$ e l'insieme dei numeri maggiori di tale numero.

   Scriviamo tali numeri nel seguente modo:

1	2	3	$\cdots$	$\dfrac{n}{2}-1$	$\dfrac{n}{2}$
n	n-1	n-2	$\cdots$	$\dfrac{n}{2}+2$	$\dfrac{n}{2}+1$
$n+1$	$n+1$	$n+1$	$\cdots$	$n+1$	$n+1$

   sull'ultima riga abbiamo scritto la somma dei due elementi incolonnati, notiamo che tale somma è costante ed è pari a $n+1$. Il numero complessivo di tali somma è pari a $\frac{n}{2}$, quindi la somma cercata è:

   $$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. n **dispari**. Le coppie che si possono scrivere come in precedenza sono, in questo caso, $\frac{n-1}{2}$; un numero, quello centrale, non può essere associato ad altri numeri, quindi possiamo scrivere la somma come segue:
$$S_n = \frac{(n+1)(n-1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Quindi possiamo concludere che la somma dei primi n numeri interi è pari a:
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Questa formula è particolarmente utile anche per calcolare la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica. Infatti, assegnati i primi n termini di una progressione aritmetica possiamo calcolare la loro somma nel seguente modo:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)),$$

tale somma può essere riscritta nel seguente modo:

$$a_1 + a_1 + \cdots + a_1 + d + 2d + \cdots + (n-2)d + (n-1)d = na_1 + d(1 + 2 + .. + (n-2) + (n-1))$$

utilizzando la formula scritta in precedenza otteniamo:
$$= na_1 + d\frac{(n-1)n}{2} = n\frac{a_1 + (a_1 + (n-1)d)}{2} = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Esercizio. Calcolare la somma dei primi n numeri interi pari.
Esercizio. Calcolare la somma dei primi n numeri interi dispari.

Progressioni geometriche

Dati n numeri reali, siano a_1, a_2, $\cdots$, a_n diremo che costituiscono una progressione geometrica se vale la seguente relazione:
$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Utilizzando questa definizione possiamo dire che: $a_n = a_{n-1}q = a_{n-2}q^2 = \cdots = a_1q^{(n-1)}$, quindi conoscendo il primo termine della progressione e il valore di q, viene detto *ragione della progressione*, è possibile determinare tutti gli elementi della progressione stessa.

Ci chiediamo ora se sia possibile determinare la somma dei primi n termini della progressione geometrica. Tale somma si può scrivere nel seguente modo:
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{(n-2)} + a_1q^{(n-1)} =$$
$$= a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)})$$

Per calcolare la somma richiesta dobbiamo calcolare la somma:
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)},$$

a tale fine possiamo procedere come segue:

- moltiplichiamo, se $q \neq 1$, la somma che dobbiamo calcolare per il fattore $(1-q)$;
- tale prodotto se sviluppato diventa:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} - q(1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)}) = 1 - q^n;$$

- indicata con S la somma cercata risulterà:

$$S(1-q) = 1 - q^n,\ S = \frac{1-q^n}{1-q};$$

La somma degli n termini di una progressione geometrica potrà quindi essere scritta nel seguente modo:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Nota. Se $q = 1$ allora $q^k = 1$, la somma diventa $S = n$.

Analizziamo ora il comportamento della somma S_n quando n cresce. Dobbiamo distinguere i seguenti casi:

1. $q = 1$. In questo caso la somma è pari a n, come detto in precedenza.
2. $q = -1$. Se n è pari la somma S_n vale 0, mentre se n è dispari la somma S_n è 1.
3. $|q| < 1$. All'aumentare di n la quantità q^n diventa sempre più piccola, in modulo, e si avvicina al valore 0. Diremo allora che S_∞ (somma della serie geometrica) vale:

$$S_\infty = \frac{1}{1-q}.$$

4. $|q| > 1$. La somma S_n non si stabilizza all'aumentare di n, ma se $q > 1$ la somma diventa sempre più grande (diverge all'infinito), mentre se $q < -1$ la somma non ha un comportamento definito, assume alternativamente valori positivi e negativi.

Ad esempio se $q = \frac{1}{2}$ la somma degli infiniti termini della serie geometrica di ragione q (ovvero la somma di tutte le potenze del tipo $\frac{1}{q^k}$, con k intero), si può calcolare come abbiamo detto prima:

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Questo permette anche di spiegare la risposta del barista agli infiniti matematici che stavano ordinando birra.

Utilizzeremo quanto detto per calcolare l'area di un segmento parabolico.