

Vettori e geometria

Dopo aver richiamato alcune definizioni e proprietà relative ai vettori, vogliamo vedere come sia possibile utilizzarli per descrivere i fondamentali elementi geometrici e come tale descrizione possa essere utilizzata per dimostrare alcuni esercizi di geometria elementare.

Ammettiamo che sia nota la definizione di vettore nel piano o nello spazio (quale classe di equivalenza di segmenti orientati equipollenti):

- Dati due punti, siano A e B , determinare in modo univoco un vettore \mathbf{v} , avente origine in A e punto finale B . Tale vettore verrà indicato con $\mathbf{v} = (B - A)$.
- È possibile, data una coppia di vettori, siano \mathbf{v} e \mathbf{w} , definire un'operazione, detta somma di vettori, che associa alla coppia (\mathbf{v}, \mathbf{w}) uno ed un solo vettore che chiameremo \mathbf{z} e scriveremo: $\mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Tale somma è definita tramite la regola del parallelogramma.
- Dato un numero reale $\lambda \neq 0$ ed un vettore \mathbf{v} , possiamo definire il vettore $\lambda\mathbf{v}$, come il vettore che ha la stessa direzione del vettore \mathbf{v} , per modulo $|\lambda|v$, e per verso quello di \mathbf{v} , se λ è positivo, quello opposto a quello di \mathbf{v} , se λ è negativo.
- Diremo che due vettori sono linearmente indipendenti se risulta soddisfatta la condizione: $\lambda_1\mathbf{v} + \lambda_2\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$. Se due vettori sono linearmente dipendenti allora: i due vettori hanno la stessa direzione, ovvero le rette sulle quali giacciono, sono parallele. Più in generale se abbiamo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, diremo che tale insieme di vettori è formato da vettori linearmente indipendenti se l'unica combinazione che soddisfa la condizione:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

è quella soddisfacente la condizione: $\lambda_j = 0, \forall j$. Il numero massimo di vettori nel piano linearmente dipendenti è pari a 2, quindi se consideriamo tre vettori questi sono linearmente dipendenti, comunque si effettui la scelta.

- Dati due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} chiameremo prodotto scalare dei due vettori il seguente numero $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = v \cdot w \cos \theta$, con θ angolo compreso tra i due vettori. Due vettori sono ortogonali se e solo se $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = 0$. Il modulo del vettore \mathbf{v} è pari a $\sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}$.

Equazione della retta passante per A e B . Un qualsiasi punto che appartiene alla retta passante per i due punti assegnati è $P = A + k(B - A)$. Utilizzando questa notazione possiamo, scegliendo opportunamente il valore del parametro k ,

determinare un punto qualsiasi sulla retta. Il modulo di tale parametro è $|k| = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$. Il segno di tale parametro indica la posizione del punto P , rispetto alla coppia A, B . Se $k > 0$ il punto P appartiene alla semiretta AB , invece se $k < 0$ il punto P appartiene alla semiretta opposta. Utilizzando i vettori è anche possibile caratterizzare i segmenti, infatti l'insieme di tutti i punti che appartengono al segmento avente per estremi A e B è dato dai punti $P = A + k(B - A)$, con $0 \leq k \leq 1$. In particolare se si sceglie quale valore del parametro $k = \frac{1}{2}$, abbiamo quale punto corrispondente il punto medio di AB .

Punto comune a due rette. Sono assegnate le rette di equazione: $P = A + k\mathbf{v}$ e $Q = B + t\mathbf{w}$, se i vettori \mathbf{v} , e \mathbf{w} , sono linearmente dipendenti le due rette sono parallele e non hanno alcun punto in comune; in caso contrario vogliamo determinare un punto che sia comune alle due rette, uguagliando le due equazioni otteniamo:

$$(A - B) + k\mathbf{v} - t\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Dato che \mathbf{v} , e \mathbf{w} sono vettori linearmente indipendenti, mentre, come abbiamo detto in precedenza, tre vettori nel piano sono linearmente dipendenti, possiamo determinare due numeri reali a, b tali che: $(A - B) = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$. Effettuando la sostituzione nell'equazione precedente otteniamo: $(a + k)\mathbf{v} + (b - t)\mathbf{w} = \mathbf{0}$, che permette di concludere che $k = -a, t = b$.

Più in generale se l'equazione della prima retta è $P = A + k(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})$ e l'equazione della seconda retta è $Q = B + (\gamma\mathbf{v} + \delta\mathbf{w})$, operando come abbiamo fatto in precedenza, otteniamo:

$$(A - B) + k(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) - t(\gamma\mathbf{v} + \delta\mathbf{w}) = (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) + k(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) - t(\gamma\mathbf{v} + \delta\mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

effettuando opportuni raccoglimenti possiamo riscrivere gli ultimi due membri nel seguente modo:

$$(a + k\alpha - t\gamma)\mathbf{v} + (b + k\beta - t\delta)\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Dato che i due vettori sono linearmente indipendenti deve risultare:

$$\begin{cases} a + k\alpha - t\gamma = 0 \\ b + k\beta - t\delta = 0 \end{cases}.$$

Tale sistema ammette una ed una sola soluzione se $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.