

## Costruzioni con riga e compasso

Nel seguito verranno illustrate alcune costruzioni che possono essere fatte utilizzando riga e compasso, per riga si intende la possibilità di tracciare un segmento che congiunge due punti qualsiasi e per compasso la possibilità di tracciare una circonferenza dato centro e raggio.

Tutte le costruzioni proposte si basano su proprietà delle figure che vengono utilizzate, ma viene omessa la dimostrazione per contenere il numero di pagine.

### 1. retta perpendicolare ad una retta data passante per $P$ .

Dobbiamo distinguere due casi possibili:

- il punto  $P$  appartiene alla retta.

- (a) Disegnare la circonferenza di centro  $P$  e raggio  $r$ , sia  $\gamma$ .
- (b) Siano  $A$  e  $B$  i punti comuni a  $\gamma$  ed alla retta.
- (c) Sia  $\gamma_1$  la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AB$ .
- (d) Sia  $\gamma_2$  la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $AB$ .
- (e) Siano  $C, D$  i punti comuni alle circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .
- (f) Tracciare la retta per  $C, D$ , tale retta è perpendicolare alla retta iniziale.

- il punto  $P$  non appartiene alla retta.

- (a) Disegnare la circonferenza di centro  $P$  e raggio  $r$ , con  $r$  maggiore della distanza di  $P$  dalla retta, sia  $\gamma$ .
- (b) Siano  $A$  e  $B$  i punti comuni a  $\gamma$  ed alla retta.
- (c) Sia  $\gamma_1$  la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AB$ .
- (d) Sia  $\gamma_2$  la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $AB$ .
- (e) Siano  $C, D$  i punti comuni alle circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .
- (f) Tracciare la retta per  $C, D$ , tale retta è perpendicolare alla retta iniziale.

### 2. Asse del segmento $AB$ .

- (a) Disegnare  $\gamma_1$  la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AB$ .
- (b) Disegnare  $\gamma_2$  la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $AB$ .
- (c) Siano  $C, D$  i punti comuni alle circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .
- (d) Tracciare la retta per  $C, D$ , tale retta è l'asse del segmento  $AB$ .

### 3. Bisettrice dell'angolo $\hat{A}OB$ .

- (a) Disegnare la circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$  a piacere, sia  $\gamma$ .
- (b) Siano  $C$  e  $D$  i punti comuni ai lati dell'angolo e alla  $\gamma$ .

- (c) Disegnare la circonferenza di centro  $C$  e raggio  $CO$ , sia  $\gamma_1$ , e la circonferenza di centro  $D$  e raggio  $DO$ , sia  $\gamma_2$ .
- (d) Sia  $E$  il punto, diverso da  $O$ , comune alle due circonferenze.
- (e) La retta  $EO$  è la bisettrice cercata.

4. **Triangolo equilatero di lato  $AB$ .**

- (a) Disegnare la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AB$ , sia  $\gamma_1$ ;
- (b) Disegnare la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $AB$ , sia  $\gamma_2$ ;
- (c) Siano  $C$  e  $D$  i punti comuni alle due circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ;
- (d) I triangoli  $ABC$  e  $ABD$  sono equilateri.

5. **Angolo di  $60^\circ$ .**

- (a) Disegnare la circonferenza di centro  $O$ , vertice dell'angolo, e raggio  $r$ , sia  $\gamma$ , e una retta  $t$  passante per  $O$ .
- (b) Siano  $A$  e  $B$  i punti comuni a  $t$  e a  $\gamma$ .
- (c) Disegnare la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $r$ , sia  $\gamma_1$ .
- (d) Siano  $O$  e  $C$  i punti comuni a  $\gamma$  e  $\gamma_1$ .
- (e) L'angolo  $A\hat{O}C$  è l'angolo cercato.

6. **Angolo di  $30^\circ$ .**

- (a) Disegnare per  $O$  una retta  $t$ .
- (b) Disegnare per  $O$  la retta  $t'$  perpendicolare a  $t$  in  $O$ .
- (c) Effettuare la costruzione dell'angolo di  $60^\circ$  come fatto in precedenza utilizzando il vertice  $O$  e la retta  $t'$ . L'angolo cercato  $C\hat{O}t$ .

7. **Triangolo rettangolo di ipotenusa  $AB$ .**

- (a) Sia  $M$  il punto medio del segmento  $AB$ .
- (b) Disegnare la circonferenza di centro  $M$  e diametro  $AB$ , sia  $\gamma$ .
- (c) Preso un punto  $P$  su  $\gamma$  il triangolo  $PAB$  è rettangolo su ed ha  $AB$  per ipotenusa.

8. **Punti notevoli di un triangolo.**

Qui riporto, più che la costruzione, la definizione dei punti notevoli.

- (a) **Baricentro.** Punto di incontro delle mediane (disegnare due mediane).
- (b) **Incentro.** Punto di incontro delle bisettrici degli angoli interni (disegnare le bisettrici di due angoli interni del triangolo).
- (c) **Ortocentro.** Punto di incontro delle altezze (disegnare due rette perpendicolari a due lati passanti per i vertici opposti).
- (d) **Circoncentro.** Punto di incontro degli assi (disegnare gli assi di due lati).
- (e) **Ex-centri.** Punto di incontro delle bisettrici di un angoli esterni e dell'angolo interno adiacente.

**9. Triangolo equilatero inscritto in una circonferenza.**

- (a) Sia  $A$  un punto della circonferenza e  $O$  il suo centro.
- (b) Disegnare il diametro  $AO$ , che incontra la circonferenza in  $D$ .
- (c) Disegnare la circonferenza di centro  $D$  e raggio  $DO$ , sia  $\gamma$ .
- (d) Siano  $B$  e  $C$  i punti comuni a  $\gamma$  ed alla circonferenza iniziale, il triangolo  $ABC$  è equilatero ed è inscritto nella circonferenza iniziale.

**10. Quadrato inscritto in una circonferenza.**

- (a) Disegnare un diametro  $AC$  della circonferenza.
- (b) Disegnare il diametro  $BD$  perpendicolare ad  $AC$ .
- (c) Il quadrilatero  $ABCD$  è un quadrato inscritto nella circonferenza.

**11. Esagono regolare inscritto in una circonferenza.**

- (a) Disegnare il diametro  $AB$  della circonferenza.
- (b) Disegnare la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AO$ , sia  $\gamma_1$ , e la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $BO$ , sia  $\gamma_2$ .
- (c) Siano  $C$  e  $D$  i punti comuni alla circonferenza iniziale ed alla circonferenza  $\gamma_1$ ,  $E$  ed  $F$  i punti comuni alla circonferenza iniziale ed alla circonferenza  $\gamma_2$ .
- (d) I punti  $A, B, C, D, E, F$  sono i vertici dell'esagono cercato.

**12. Sezione aurea del segmento  $AB$ .**

- (a) Disegnare la retta  $r$  per  $A$  perpendicolare al segmento  $AB$ .
- (b) Sia  $M$  il punto medio del segmento  $AB$ .
- (c) Disegnare la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AM$ , sia  $\gamma_1$ .
- (d) Sia  $C$  il punto comune ad  $r$  ed alla circonferenza  $\gamma_1$ .
- (e) Disegnare la circonferenza di centro  $C$  e raggio  $CA$ , sia  $\gamma_2$ .
- (f) Sia  $D$  il punto comune a  $\gamma_2$  ed al segmento  $CB$ .
- (g) Disegnare la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $BD$ , sia  $\gamma_3$ .
- (h) Sia  $E$  il punto comune al segmento  $AB$  ed alla circonferenza  $\gamma_3$ .
- (i) Il segmento  $AE$  è la sezione aurea del segmento  $AB$ .

**13. Decagono regolare inscritto in una circonferenza.**

- (a) Disegnare il segmento  $AB$ , sezione aurea del raggio della circonferenza.
- (b) Riportare 10 volte sulla circonferenza il segmento prima determinato. Il poligono che si ottiene congiungendo i punti disegnati è il decagono cercato.

**14. Pentagono regolare inscritto in una circonferenza.**

- (a) Disegnare i vertici del decagono regolare inscritto nella circonferenza.
- (b) Numerati i vertici in senso antiorario, congiungere i vertici pari (oppure quelli dispari), il poligono che si ottiene è il pentagono cercato.

15. **Centro della circonferenza.**

- (a) Siano  $A, B, C$  tre punti distinti sulla circonferenza.
- (b) Disegnare gli assi dei segmenti  $AB$  e  $AC$ , siano  $a$  e  $b$ .
- (c) Sia  $D$  il punto comune ai due assi  $a$  e  $b$ ,  $D$  è il centro della circonferenza.

16. **Circonferenza per tre punti.** Il procedimento è analogo a quello precedente per la determinazione del centro della circonferenza circoscritta, sia  $D$ . Disegnare la circonferenza di centro  $D$  e raggio  $DA$ .

17. **Circonferenza per  $A$  e  $B$ , tangente in  $A$  alla retta  $t$ .**

- (a) Disegnare l'asse del segmento  $AB$ , sia  $r$ .
- (b) Disegnare la retta passante per  $A$  e perpendicolare a  $t$ , sia  $s$ .
- (c) Sia  $C$  il punto comune alle rette  $t$  e  $s$ , questo è il centro della circonferenza.
- (d) Disegnare la circonferenza di centro  $C$  e raggio  $CA$ , questa è la circonferenza richiesta.

18. **Circonferenza per  $A$  e  $B$ , tangente alla retta  $t$ .**

I due punti si devono trovare nello stesso semipiano rispetto alla retta  $t$ , altrimenti il problema non ammette soluzioni.

- (a) Disegnare la retta  $r$  passante per i punti  $A$  e  $B$ .
- (b) Sia  $P$  il punto comune a  $r$  e  $t$ .
- (c) Disegnare il punto  $B'$  simmetrico di  $B$  rispetto a  $P$ .
- (d) Sia  $M$  il punto medio del segmento  $AB'$ .
- (e) Disegnare la circonferenza di centro  $M$  e raggio  $MA$ , sia  $\gamma$ .
- (f) Disegnare la retta  $s$  perpendicolare a  $r$  passante per  $P$ .
- (g) Siano  $C$  e  $D$  i punti comuni a  $s$  e a  $\gamma$ .
- (h) Disegnare la circonferenza di centro  $P$  e passante per  $C$ , sia  $\gamma_1$ .
- (i) Siano  $T_1$  e  $T_2$  i punti comuni a  $\gamma_1$  ed alla retta  $t$ .
- (j) Le circonferenze cercate sono quelle passanti per  $A$  e tangenti a  $t$  rispettivamente in  $T_1$  e  $T_2$ .

19. **Circonferenza per  $A$ , tangente alle due rette  $t_1$  e  $t_2$ .**

Distinguiamo due casi.

- il punto  $A$  appartiene ad una delle due rette tangenti. Ammettiamo che il punto appartenga alla retta  $t_1$ .
  - (a) Disegnare le bisettrici degli angoli formati dalle due rette  $t_1$  e  $t_2$ , siano  $b_1$  e  $b_2$ .
  - (b) Disegnare la retta per  $A$  perpendicolare a  $t_1$ , sia  $r$ .
  - (c) Siano  $C_1$  e  $C_2$  i punti comuni a  $r$  ed alle rette  $b_1$  e  $b_2$ .
  - (d) Disegnare le circonferenze di centro  $C_1$  e  $C_2$ , aventi raggi rispettivamente:  $C_1A$  e  $C_2A$ . Tali circonferenze sono quelle cercate.

- Il punto  $A$  non appartiene ad alcuna delle rette.
  - (a) Detto  $P$  un punto di una delle due rette, ad esempio  $t$ , si disegni la circonferenza tangente in  $P$  a tale retta ed interna all'angolo al quale appartiene anche il punto  $A$ , sia  $\gamma$ .
  - (b) Disegnare la retta passante per  $A$  e per il punto comune alle due circonferenze, sia  $r$ .
  - (c) Siano  $B$  e  $C$  i punti comuni a  $r$  e  $\gamma$ .
  - (d) Disegnare le rette rispettivamente per  $B$  e  $P$ , sia  $s_1$  e per  $C$  e  $P$ , sia  $s_2$ .
  - (e) Disegnare le rette per  $A$  e parallele a  $s_1$  e  $s_2$ , siano  $t_1$  e  $t_2$ .
  - (f) Siano:  $P_1$  il punto comune a  $t_1$  e  $t$  e  $P_2$  il punto comune a  $t_2$  e  $t$ .
  - (g) Disegnare le circonferenze passanti per  $A$ ,  $t$  e rispettivamente per  $P_1$  e per  $P_2$ . Queste sono le circonferenze cercate.

**20. Tangente ad una circonferenza in un suo punto  $P$ .**

- (a) Disegnare la retta passante per  $P$  e per il centro della circonferenza, sia  $r$ .
- (b) Disegnare la retta per  $P$  perpendicolare alla retta  $r$ , questa è la tangente cercata.

**21. Tangenti ad una circonferenza condotte da un punto esterno  $P$ .**

- (a) Sia  $C$  il centro della circonferenza.
- (b) Sia  $M$  il punto medio del segmento  $PC$ .
- (c) Disegnare la circonferenza di centro  $M$  e raggio  $MP$ , sia  $\gamma$ .
- (d) Siano  $A$  e  $B$  i punti comuni alla circonferenza iniziale e  $\gamma$ .
- (e) Disegnare le rette  $PA$  e  $PB$ , tali rette sono le tangenti cercate.

**22. Tangenti comuni a due circonferenze.**

**Nota.** Le circonferenze devono essere esterne, ma la costruzione che si propone funziona anche per circonferenze tangenti esternamente e secanti.

- (a) Siano  $C_1$  e  $C_2$  i centri delle due circonferenze.
- (b) Disegnare la retta  $r$  passante per  $C_1$  e  $C_2$ .
- (c) Disegnare per  $C_1$  una retta, diversa dalla retta  $r$ , sia  $s$ .
- (d) Disegnare per  $C_2$  la retta parallela ad  $s$ , sia  $s_1$ .
- (e) Siano  $A$  e  $B$  i punti comuni alla circonferenza di centro  $C_1$  ed alla  $s$ .
- (f) Siano  $A'$  e  $B'$  i punti comuni alla circonferenza di centro  $C_2$  ed alla  $s_1$ .
- (g) Disegnare le rette per  $A$  e  $A'$ , sia  $t_1$ , e per  $B$  e  $B'$ , sia  $t_2$ .
- (h) Siano  $P_1$  e  $P_2$  i punti comuni alle rette  $t_1$  e  $t_2$  ed alla retta  $r$ .
- (i) Disegnare le rette tangenti ad una delle due circonferenze condotte per  $P_1$  e  $P_2$ , queste sono le quattro rette tangenti comuni.

**23. Centro dell'ellisse.**

- (a) Disegnare la corda  $AB$ , sia  $M$  il suo punto medio.

- (b) Disegnare la corda  $CD$ , sia  $N$  il suo punto medio.
- (c) Disegnare la retta  $MN$ , è un diametro dell'ellisse.
- (d) Siano  $E, F$ , e sia  $O$  il punto medio di  $EF$ . Il punto  $O$  è il centro dell'ellisse.

**24. Assi di simmetria dell'ellisse.**

- (a) Si determina il centro dell'ellisse, sia  $O$ .
- (b) Disegnare la circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$ , sia  $\gamma$ , in modo che tale circonferenza abbia quattro intersezioni con l'ellisse.
- (c) Siano  $A, B, C, D$  i punti comuni a  $\gamma$  e all'ellisse.
- (d) Disegnare le bisettrici degli angoli  $\hat{A}OB$  e  $\hat{A}OD$ , tali rette sono gli assi dell'ellisse.

**25. Vertici dell'ellisse.**

Si disegnano gli assi come al punto precedente. I punti comuni ad ellisse e assi sono i vertici cercati.

**26. Fuochi dell'ellisse.**

- (a) Disegnare gli assi dell'ellisse e i suoi vertici:  $A, B, C$  e  $D$ .
- (b) Sia  $E$  il punto medio del semiasse maggiore  $AO$ , con  $O$  centro dell'ellisse.
- (c) Disegnare la circonferenze di centro  $E$  e raggio  $EO$ .
- (d) Disegnare la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $BO$ , con  $BO$  semiasse minore.
- (e) Siano  $F$  e  $G$  i punti comuni alle due circonferenze.
- (f) Disegnare la circonferenze di centro  $O$  e raggio  $OF$ , tale circonferenza interseca l'asse maggiore nei due fuochi.

**27. Tangente all'ellisse in un suo punto  $P$ .**

- (a) Disegnare il centro dell'ellisse, sia  $C$ , che incontra l'ellisse in  $A$ .
- (b) Disegnare una corda  $BC$  parallela a  $PA$ .
- (c) Sia  $M$  il punto medio della corda  $BC$ .
- (d) Disegnare il diametro  $MC$ .
- (e) La retta tangente in  $P$  all'ellisse è la retta parallela al diametro  $MC$ , passante per  $P$ .

**28. Asse di simmetria di una parabola.**

- (a) Disegnare due corde parallele della parabola, siano  $AB$  e  $CD$ .
- (b) Siano  $M$  e  $N$  i punti medi delle corde  $AB$  e  $CD$ .
- (c) La retta  $MN$  è parallela all'asse della parabola.
- (d) Disegnare la retta per  $A$  e perpendicolare alla retta  $MN$ , sia  $t$ .
- (e) Sia  $E$  il punto comune a  $t$  ed alla parabola.
- (f) L'asse del segmento  $AE$  è l'asse della parabola

29. **Vertice della parabola.** Dopo aver disegnato l'asse della parabola il punto  $V$ , comune all'asse ed alla parabola, è il vertice.

30. **Fuoco della parabola.**

- (a) Disegnare una corda  $AB$  non perpendicolare all'asse della parabola.
- (b) Sia  $M$  il punto medio di  $AB$ .
- (c) Disegnare la retta parallela all'asse di simmetria passante per  $M$ , sia  $m$ .
- (d) Sia  $P$  il punto comune alla parabola ed alla retta  $m$ .
- (e) Disegnare la retta passante per  $P$  e parallela a  $AB$ , sia  $t$ .
- (f) Disegnare la retta per  $P$  perpendicolare a  $t$ , sia  $n$ .
- (g) Disegnare la retta simmetrica di  $m$  rispetto alla retta  $n$ , sia  $s$ .
- (h) Sia  $F$  il punto comune all'asse della parabola ed alla retta  $s$ , questo è il fuoco della parabola.

31. **Direttrice della parabola.**

- (a) Disegnare l'asse di simmetria, il vertice  $V$  ed il fuoco  $F$  della parabola.
- (b) Sia  $D$  il punto simmetrico di  $F$  rispetto a  $V$ .
- (c) Disegnare la retta  $d$  perpendicolare all'asse di simmetria passante per il punto  $D$ . Questa è la direttrice della parabola.

32. **Tangente e normale alla parabola in un suo punto.**

- (a) Disegnare l'asse di simmetria ed il fuoco  $F$  della parabola.
- (b) Disegnare per  $P$  le rette, siano  $a$  e  $b$ , passante per  $F$  e parallela all'asse di simmetria.
- (c) Disegnare le bisettrici degli angoli formati dalle rette  $a$  e  $b$ , una di queste due rette è la tangente in  $P$  e l'altra è la retta normale.

33. **Centro, assi di simmetria, tangente in un punto  $P$ , vertici dell'iperbole.** Le costruzioni sono analoghe a quelle descritte per l'ellisse.

34. **Asintoti dell'iperbole.**

- (a) Disegnare il centro, i vertici e gli assi di simmetria dell'iperbole, siano  $a$  quello trasverso e  $b$  quello non trasverso.
- (b) Disegnare la retta perpendicolare ad  $a$  passante per uno dei vertici, sia  $t$ .
- (c) Disegnare la circonferenza di centro  $V$  e raggio  $VC$ , con  $C$  centro dell'iperbole, sia  $\gamma$ .
- (d) Sia  $A$  un punto comune a  $\gamma$  ed ad  $a$ .
- (e) Disegnare la retta per  $A$  e perpendicolare all'iperbole, sia  $B$  uno dei punti comuni alle due curve.
- (f) Disegnare la retta per  $B$  parallela ad  $a$ , sia  $c$ .
- (g) Sia  $D$  il punto comune a  $t$  e  $c$ .
- (h) Disegnare la retta passante per  $C$  e per  $D$ , tale retta è un asintoto all'iperbole.

- (i) Disegnare la retta simmetrica rispetto ad uno dei due assi della retta ottenuta al punto precedente, tale retta è il secondo asintoto.

**35. Fuochi dell'iperbole.**

- (a) Si costruiscono i punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , come alla costruzione precedente.
- (b) Disegnare la circonferenza di centro  $C$  e raggio  $CB$ , sia  $\gamma$ .
- (c) Siano  $F_1$ ,  $F_2$  i punti comuni a  $\gamma$  ed all'asse trasverso, tali punti sono i fuochi dell'iperbole.