La retta di Eulero

Vogliamo dimostrare che in ogni triangolo il baricentro (G), l'ortocentro (H) e il circoncentro (O), di un triangolo ABC sono allineati, la retta passante per tali punti è detta retta di Eulero.

Iniziamo con il caratterizzare i tre punti prima richiamati utilizzando i vettori.

BARICENTRO. Il baricentro è il punto comune alle tre mediane di un triangolo. La mediana di un triangolo è la retta che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto. Indichiamo con L, M, N rispettivamente i punti medi dei latiBC, AC, AB. Scegliamo due vettori nel piano che risultino linearmente indipendenti, ad esempio i vettori $(B - A) = 2\mathbf{v}$ e $(C - A) = 2\mathbf{w}$, tali vettori sono linearmente indipendenti in quanto giacciono su due lati distinti del triangolo iniziale. Allora risulta:

$$L = A + \mathbf{v} + \mathbf{w},\ M = A + \mathbf{w},\ N = A + \mathbf{v}.$$

Scriviamo le equazioni di due mediane ed il loro, eventuale, punto comune:

$$m_B : G = B+k(B-M) = B+k(2\mathbf{v}-\mathbf{w}),\ m_C : G = C+h(C-N) = C+h(2\mathbf{w}-\mathbf{v}).$$

le due rette non sono parallele, dato che i vettori che rappresentano le direzioni sono linearmente indipendenti, quindi esiste un punto (G) comune.

Per poterlo determinare sottraiamo dalla prima equazione la seconda, così facendo otteniamo la seguente combinazione lineare:

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + (2k + h)\mathbf{v} - (k + 2h)\mathbf{w} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(2 + 2k + h) - \mathbf{w}(2 + k + 2h) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

dato che i due vettori sono linearmente indipendenti deve risultare:

$$\begin{cases} 2 + 2k + h = 0 \\ 2 + k + 2h = 0 \end{cases}$$

che ammette quali soluzioni: $h = k = -\dfrac{2}{3}$, il che permette di affermare che il punto G è il seguente:

$$G = B - \frac{4}{3}\mathbf{v} + \frac{2}{3}\mathbf{w} = A + \frac{2}{3}(\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Dato che $(G-A) = \frac{2}{3}(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ e $(L-A) = \mathbf{v}+\mathbf{w}$ possiamo concludere che il punto G è allineato con A e L, quindi tale punto appartiene anche alla terza mediana. Quindi possiamo concludere che le tre mediane si incontrano in un punto, G.

Sempre dai calcoli precedenti possiamo concludere che il segmento $GA = 2GL$, nota proprietà del baricentro di un triangolo.

Indicato con O un qualsiasi punto del piano, possiamo scrivere:

$$(G-O) = (G-A) + (A-O) = (A-O) + \frac{2}{3}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (A-O) + \frac{1}{3}[(B-A) + (C-A)] =$$
$$= (A-O) + \frac{1}{3}[(B-O) - (A-O) + (C-O) - (B-O)] = \frac{1}{3}[(A-O) + (B-O) + (C-O)],$$

che risulterà utile nel seguito.

Prima di proseguire con la dimostrazione dell'esistenza degli altri due punti, effettuiamo alcune considerazioni sui due vettori $\mathbf{v}$, e $\mathbf{w}$. Nella descrizione precedente i due vettori erano solamente linearmente indipendenti, per poter agevolmente proseguire nello sviluppo della dimostrazione dobbiamo imporre alcune condizioni. Il primo vettore, $\mathbf{v}$,può essere scelto avente modulo pari a 1. Se tale vettore non soddisfa tale condizione allora sceglieremo quale primo vettore il vettore $\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{v}$. Ogni vettore nel piano si potrà scrivere come $\mathbf{z} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$, il secondo vettore $\mathbf{w}$' che utilizziamo è il vettore che soddisfa le due condizioni seguenti:

- ha modulo unitario;
- che è ortogonale al vettore $\mathbf{v}$' determinato in precedenza.

Per poter determinare i due valori a e b dobbiamo per prima cosa la seguente equazione:

$$\mathbf{w}' \times \mathbf{v} = 0.$$

La seconda equazione la si ottiene imponendo che il vettore $\mathbf{w}'$ abbiamo modulo 1. Dato che tale sistema ammette una soluzione il procedimento descritto permette di determinare sempre due vettori che soddisfano le condizioni indicate.

La seconda considerazione riguarda la determinazione di un vettore ortogonale ad un vettore dato. Se i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali ed hanno modulo unitario, allora dato il vettore $\mathbf{z} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$, un vettore $\mathbf{z}$', ortogonale a $\mathbf{z}$ può essere determinato velocemente nel seguente modo:

$$\mathbf{z}' = b\mathbf{v} - a\mathbf{w}.$$

Infatti $\mathbf{z} \times \mathbf{z}' = (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \times (b\mathbf{v} - a\mathbf{w}) = ab - ab = 0.$

Quindi possiamo sempre scegliere in un piano due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, ortogonali tra loro ed aventi modulo 1.

Nel caso che dobbiamo esaminare possiamo scegliere i vettori linearmente indipendenti nel seguente modo: $\mathbf{v}$, ha per direzione AB, mentre $\mathbf{w}$, è perpendicolare al vettore precedente.

ORTOCENTRO. Viene detto ortocentro il punto comune alle altezze di un triangolo. Utilizzando i vettori prima indicati possiamo dire che: $(B-A)=c\mathbf{v}$, mentre $(C-A)=a\mathbf{v}+b\mathbf{w}$. L'altezza h_C ha equazione: $H=C+k\mathbf{w}$, per la definizione data di vettore $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Un vettore ortogonale al lato $(C-A)$ è il vettore $\mathbf{N}=b\mathbf{v}-a\mathbf{w}$, quindi l'altezza h_B ha equazione $H=B+h(b\mathbf{v}-a\mathbf{w})$. Il punto comune alle due altezze può essere ottenuto come abbiamo descritto in precedenza, andando per prima cosa a sottrarre dalla seconda equazione la prima:

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=(B-C)+h(b\mathbf{v}-a\mathbf{w})-ck\mathbf{w}=(B-A)-(C-A)+h(b\mathbf{v}-a\mathbf{w})-ck\mathbf{w}=\\&=c\mathbf{v}-(a\mathbf{v}+b\mathbf{w})+h(b\mathbf{v}-a\mathbf{w})-ck\mathbf{w}=(c-a+hb)\mathbf{v}+(-b-ha-ck)\mathbf{w}.\end{aligned}$$

che può essere risolta andando a determinare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases}c-a+hb=0\\b+ha+ck=0\end{cases}.$$

Chiaramente il sistema ammette soluzione, ma noi possiamo determinare solo il valore dell'indeterminata h che permette di ottenere il punto H. Dalla prima equazione, che contiene solo un'indeterminata, otteniamo: $h=\dfrac{a-c}{b}$. Sostituendo otteniamo:

$$H=A+a\mathbf{v}-\frac{a}{b}(a-c)\mathbf{w}.$$

Mostriamo ora che il punto H appartiene anche alla terza altezza h_A. Calcoliamo a tale proposito il prodotto scalare: $(B-C)\times(H-A)=[(c-a)\mathbf{v}-b\mathbf{w}]\times\left[a\mathbf{v}-\dfrac{a}{b}(a-c)\mathbf{w}\right]=0$, quindi la retta HA è ortogonale alla retta BC. Quindi le tre rette si incontrano in un unico punto H.

CIRCONCENTRO. Esiste un punto comune ai tre assi del rettangolo, tale punto è detto circoncentro ed è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo (la circonferenza che passa per i tre vertici del triangolo).

Utilizzando la notazione del punto precedente possiamo scrivere le equazioni di due assi. Si ottiene:

$$a_{AB}:O=N+k\mathbf{w},\ a_AC:O=M+h(b\mathbf{v}-a\mathbf{w}),$$

dove N, M sono i punti medi dei lati AB e AC.

Utilizzando l'usuale procedimento per la determinazione del punto comune otteniamo che i due assi hanno quale punto comune il punto $O = A + \frac{c}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2b}[b^2 - ac + a^2]$. Per dimostrare che tale punto appartiene al terzo asse, quello del lato BC, calcoliamo il prodotto scalare: $(O - L) \times (B - C) = \left[\frac{a}{2}\mathbf{v} + \frac{a(c-a)}{2b}\mathbf{w}\right] \times [(c - a)\mathbf{v} - b\mathbf{w} = \mathbf{0}]$, dove L è il punto medio del lato BC. Quindi tale punto appartiene anche al terzo asse ed è l'ortocentro del triangolo.

Dato un triangolo ABC sia O il suo ortocentro e definiamo il punto H' nel seguente modo:

$$H' = O + (A - O) + (B - O) + (C - O).$$

Vogliamo dimostrare che H' è l'ortocentro del triangolo. A tale fine mostriamo che il vettore $(H' - A)$ è ortogonale al lato $(B - C)$, dato che l'altezza del triangolo h_A è ortogonale al lato BC e passa per A, possiamo concludere che la direzione di $(H' - A)$ è l'altezza h_A. Dato che tale dimostrazione può essere ripetuta per tutti i vertici, H' appartiene a tutte le altezze, quindi è l'ortocentro H del triangolo.

Iniziamo con il notare che $(H' - A) = (O - A) + (A - O) + (B - O) + (C - O) = (B - O) + (C - O)$, calcoliamo ora

$$\begin{aligned}(H' - A) \times (B - C) = [(B - O) + (C - O)] \times [(B - O) - (C - O)] = \\ = (B - O) \times (B - O) + (C - O) \times (B - O) - (C - O) \times (B - O) + (C - O) \times (C - O) = \\ \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 = 0,\end{aligned}$$

quindi BC è perpendicolare a $H'A$, per quanto detto in precedenza $H' \equiv H$.

Da tutto quanto detto in precedenza possiamo dire che:

$$G = O + \frac{1}{3}[(A - O) + (B - O) + (C - O)],\ H = O + (A - O) + (B - O) + (C - O),$$

e quindi possiamo affermare che i tre punti G, H, O sono sempre allineati.