Esercizi di teoria dei numeri

1. Nel seguito indicheremo $MCD(a,b) = (a,b)$, dimostrare che $(a,b) = (a,b-a)$, $(a,b) = (a,b+a)$ e più in generale $(a,b) = (a,b+ka)$.

2. Trovare il MCD tra:
$$1111 \text{ e } \underbrace{111\cdots111}_{2006}.$$

3. Dimostrare che:
$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)(2n) = 2^n[1\cdot 3\cdot\cdots(2n-3)(2n-1)].$$

4. Un pavimento di forma rettangolare è stato ricoperto con piastrelle di forma quadrate. Sapendo che le dimensioni della stanza, in funzione del numero di piastrelle utilizzate, sono a e b e che il numero di piastrelle adiacenti al perimetro è pari al numero di piastrelle che non sono adiacenti, determinare il numero di piastrelle utilizzato.

5. dimostrare che ci sono infiniti numeri a tali che $2a$ è un quadrato perfetto e $3a$ è un cubo perfetto.

6. Trovare il M.C.D. tra tutti i numeri della forma:
$$3n^5 + 5n^3 - 8n.$$

7. Qual è la cifra delle unità del numero 17^{17}.

8. Quanto vale il M.C.D. tra i numeri k_n e k_{n+1}, con $k_n = 100 + n^2$?

9. Trovare le soluzioni intere dell'equazione:
$$3^a - 2^b = 1.$$

10. Determinare i numeri p, n interi positivi, con p primo tali che risulta:
$$5p + 49 = n^2.$$

11. Risolvere, nell'insieme dei numeri interi, l'equazione:
$$3x^2 - 2y^2 = 1998.$$

12. Risolvere, nell'insieme dei numeri interi, l'equazione:
$$x^2 + 2y^2 = 4z^2.$$

13. Risolvere, nell'insieme dei numeri interi, la seguente equazione:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5}.$$

14. Trovare tutte le coppie di numeri interi $(m,\, n)$ tali che:
$$3 \cdot 2^n + 1 = n^2.$$

15. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi e sia $P(x) = 2006$. Quali sono i valori che può assumere $P(2004)$? Può essere $P(2004) = 7$? Può essere $P(2004) = 70$?

16. Sia P un polinomio a coefficienti interi con $P(1) = P(3) = 7$. Quanto può valere $P(4)$?

17. Il numero 200...006, avente k zeri tra la prima e l'ultima cifra può essere un quadrato perfetto?

18. Dimostrare che se 11 divide $2a + 3b$ allora 11 divide anche il numero $a^2 - 5b^2$.

19. sia S un sottoinsieme formato da 756 numeri interi scelti tra 1 e 2008, estremi inclusi. dimostrare che esistono due numeri a e b di S tali che $a + b$ è divisibile per 8.

20. Sia n un numero intero positivo e k un numero intero dispari. Detti a, b, c numeri interi, non necessariamente positivi tali che:
$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$
Dimostrare che $a = b = c$.

21. Sia $S(n)$ la somma delle cifre che compongono il numero n, dimostrare che $n - S(n)$ è un multiplo di 9.

22. sia $n \geq 10$ un numero intero scritto in base 10. Sia $S(n)$ la somma delle cifre di n. Un *moncone* di n è un numero intero ottenuto da n togliendo alcune cifre di n, partendo dal destra. Ad esempio 23 è un *moncone* di 2351. Se $T(n)$ è la somma di tutti i *monconi* di n dimostrare che $n = S(n) + 9T(n)$.

esercizi di geometria

1. Utilizzando i vettori dimostrare che il segmento che congiunge i punti medi dei lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è la metà di tale lato.

2. Dimostrare che in un parallelogramma le diagonali si tagliano scambievolmente a metà.

3. Dimostrare che le tre mediane di un triangolo si incontrano in un punto detto baricentro (G).

4. Determinare il luogo descritto dall'ortocentro del triangolo ABC con A, B fissi e C appartenente ad una retta r parallela ad AB.

5. Dimostrare che dato un triangolo ABC dimostrare che baricentro G, ortocentro H e circoncentro O sono allineati.

6. Data una circonferenza γ e due triangoli ABC e $A'BC$, detti H e H' i rispettivi ortocentri, dimostrare che i segmenti AA' e HH' sono paralleli e congruenti.

7. Dato il quadrilatero $ABCD$ si costruiscano esternamente ad esso i quadrati Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 rispettivamente su AB, BC, CD, DA. Detti O_1, O_2, O_3, O_4 i rispettivi centri, dimostrare che O_1O_3 e O_2O_4 sono congruenti e perpendicolari.

8. Dato un quadrilatero convesso $ABCD$, si prolunghino i lati opposti AD e BC, che si incontrano in E, e i lati DC e AB, che si incontrano in F. Dimostrare che i punti medi dei segmenti BD, AC e EF sono allineati.

9. Sia ABC un triangolo e sui suoi lati si prendano i punti $E \in AC$, $F \in AB$, $D \in BC$. Indicato con P il punto comune ai segmenti EF e AD, dimostrare che:

$$\frac{AB}{AF} \cdot DC + \frac{AC}{AE} \cdot DB = \frac{AD}{AP} \cdot BC.$$