**Problema 1**

1. La derivata prima della funzione assegnata è:
$$f'(x) = \left(1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right) e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} =$$
$$= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

2. La funzione $f(x)$ è continua e derivabile infinite volte su tutto $\mathbb{R}$, quindi gli eventuali massimi e minimi devono soddisfare la condizione: $f'(x) = 0$.

   L'unico punto che soddisfa tale condizione è il punto $x = 0$, distinguiamo ora i due casi possibili $n$ pari e $n$ dispari, per determinare il comportamento della funzione in tale punto.

   (a) $n$ pari. La derivata prima ha segno costante in un qualsiasi intorno di $x = 0$, e si annulla per tale valore, quindi in tale punto la funzione ha un punto di flesso. Dato che la derivata prima è negativa il flesso è discendente.

   (b) $n$ dispari. La derivata prima cambia di segno in un qualsiasi intorno di $x = 0$, e si annulla per tale valore, quindi in tale punto la funzione ha un punto estremante. In particolare la derivata prima è positiva per $x < 0$ mentre è negativa per $x > 0$, la funzione ha quindi in $x = 0$ un punto di massimo. Tale punto di massimo è anche assoluto in quanto:
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+.$$

   Se $n$ è dispari possiamo dire che la funzione ha un massimo assoluto per $x = 0$, quindi $f(x) \leq f(0) = 1$, ciò dimostra la tesi richiesta dal compito.

3. La funzione da studiare è $g(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) e^{-x}$.

   Il grafico della funzione è quello riportato in figura, in particolare ha due flessi in $x = 0$ (flesso a tangente orizzontale) e in $x = 2$.

4. L'integrale richiesto è:
$$\int_0^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx = \left[-\frac{x^2 + 4x + 6}{2} e^{-x}\right]_0^2 = 3 - 9e^{-2} \sim 1.781982450.$$

   Tale integrale rappresenta l'area della parte di piano evidenziato nella figura 2.

**Problema 2**

1. Per rispondere alla prima richiesta calcoliamo la derivata prima della funzione $f(x) = x^3 + kx$, $f'(x) = 3x^2 + k$ e distinguiamo i tre casi:

   (a) $k < 0$. La funzione ammette un punto di massimo ed un punto di minimo in $x = \pm\sqrt{-\dfrac{k}{3}}$ rispettivamente. Il punto $x = 0$ è un punto di flesso discendente. Il grafico della funzione è quello riportato nella figura 3 in rosso.

   (b) k=0. In questo caso la funzione ha un punto di flesso ascendente a tangente orizzontale in $x = 0$, non ha punti estremanti. Il grafico è quello nello nella figura 3.

(c) $k > 0$. Anche in questo caso la funzione ha un flesso ascendente in $x = 0$, con tangente non orizzontale, non ha punti estremanti. Il grafico corrispondenti è quello blu nella figura 3.

2. L'equazione che si vuole risolvere è la seguente:

$$x^3 - 1 + x = 0.$$

Per dimostrare l'esistenza di una soluzione sull'intervallo $[0; 1]$ possiamo porre $\phi(x) = x^3 - 1 + x$ e cercare le sue, eventuali intersezioni sull'intervallo indicato.

La funzione $\phi(x)$ è continua e derivabile infinite volte sul suo campo di esistenza. In particolare risulta:

$$\phi'(x) = 3x^2 + 1$$

, che risulta sempre positiva, quindi la funzione $\phi(x)$ è monotona crescente. Dato che $\phi(0) = -1$ e $\phi(1) = 1$ sono soddisfatte le condizioni per poter affermare che su $[0; 1]$ l'equazione $\phi(x) = 0$ ammetta una ed una sola soluzione.

Per poter determinare un'approssimazione, a meno di 0.1 (ovvero con una cifra decimale corretta) dell'equazione assegnata, applichiamo il metodo di Raphson - Newton.

Tale metodo può essere sintetizzato come segue:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{\phi(x_n)}{\phi'(x_n)} = \dfrac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1} \end{cases} .$$

Applicando successivamente il procedimento descritto otteniamo: $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{3}{4} = 0.75$, $x_2 \sim 0.6860$, $x_3 \sim 0.6823$, quindi l'approssimazione richiesta è 0.6.

3. La funzione inversa della funzione assegnata è la funzione $g(x) = \sqrt[3]{x}$, il cui grafico è simmetrico del grafico della funzione assegnata rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Per calcolare la misura di tale area basterà calcolare l'area compresa tra la curva e la bisettrice indicata, quindi moltiplicare per due.

L'area cercata è:

$$A = 2\int_0^1 (x - x^3)dx = \left[2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

4. Le sezioni del solido assegnato sono perpendicolari alla bisettrice del primo e terzo quadrante, hanno tutte altezza pari a 12, quindi la sezione di area maggiore sarà quella ha l'altro lato di misura maggiore. Detto $P$ un punto del grafico della curva $y = x^3$, con $0 \leq x \leq 1$, la misura del lato cercato è pari alla distanza di $P$ dalla bisettrice. Tale segmento ha misura massima se, indicata con $r$ la retta parallela alla bisettrice passante per $P$, tale retta incontra una ed una sola volta la curva. Per determinare tale punto è quindi possibile utilizzare il teorema di Lagrange che è applicabile al caso in esame in quanto: $y = x^3$ è continua in $[0; 1]$ e derivabile in $(0; 1)$, come richiesto dalle ipotesi del teorema stesso. Dato che $y' = 3x^2$ e $m = 1$, deve risultare:

$$3x^2 = 1,\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

per le condizioni imposte il punto richiesto è quindi il punto: $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Il solido assegnato è un cilindro avente per base l'area prima determinata e altezza 12, quindi il suo volume è $V = \dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6$.

**Questionario**

1. Risulta:
$$\int_{-b}^{b} |x-a|dx = \int_{-b}^{a} (a-x)dx + \int_{a}^{b} (x-a)dx = a^2 + b^2.$$

2. Una funzione si dice iniettiva se ad elementi diversi del dominio corrispondono elementi diversi del codominio. Nel caso in esame dato che $A$ è composto da quattro elementi e $B$ da 3, possiamo concludere che non possono esistere funzioni iniettive da $A \to B$.

   Una funzione si dice suriettiva se ogni elemento del codominio ha almeno una controimmagine nel dominio. Dato che la funzione $f : A \to B$ così definita: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = a$ è suriettiva, possiamo concludere che esistono funzioni che soddisfano la condizione indicata.

   Una funzione si dice biiettiva se è simultaneamente iniettiva e suriettiva, quindi, per quanto detto prima, possiamo concludere che non esistono funzioni iniettive tra i due insiemi.

3. Affinché la moneta cada all'interno della mattonella il centro della moneta deve trovarsi all'interno del quadrato di lato $(L - D)$ ($L$ lato della mattonella, $D$ diametro della moneta) e centro il centro della mattonella, infatti se il centro della moneta soddisfa la condizione prima scritta, la moneta risulterà o completamente interna alla mattonella, oppure, se il centro appartiene ad uno del lati, tangente ai lati della mattonella (in particolare se il centro coincide con uno dei vertici del quadrato, la moneta è tangente a due lati della mattonella). Possiamo quindi dire che la probabilità cercata è:
$$p = \frac{(L-D)^2}{L^2} = \frac{(10 - 2.575)^2}{100} \sim 55.13\%.$$

4. Un poliedro regolare, avente le facce esagonali non può esistere. Infatti un poliedro si dice regolare se ha tutte le facce che sono poligoni regolari ed in ogni vertice convergono lo stesso numero di facce. In particolare tutti gli angoli poliedri devono essere uguali, e la somma delle facce in un vertice deve essere $< 360°$. Se un poligono regolare avente le facce esagonali esistesse, dovrebbe risultare $120° \cdot k$, con $k$ numero di facce che hanno un vertice in comune, deve risultare $< 360°$. Dato che $k$ deve essere almeno 3 e $3 \cdot 120° = 360°$, possiamo concludere che un tale poliedro non può esistere.

5. Ricordiamo che $\dfrac{a}{b} = c$ se $a = b \cdot c$.

   (a) Utilizzando la definizione prima ricordata possiamo dire che $\dfrac{0}{1} = 0$, infatti $0 \cdot 1 = 0$.

   (b) Dato che $0 \cdot b = 0$, comunque si scelga $b$, risulta $\dfrac{0}{0}$ indeterminato.

   (c) Dato che $0 \cdot b \neq 1$, non esiste alcun valore $b$ che soddisfa la condizione data, risulta impossibile assegnare all'espressione un valore.

   (d) Anche la forma $0^0$ è indeterminata.

6. Per risolvere l'equazione proposta utilizzando il metodo di Raphson-Newton si devono cercare gli zeri della funzione: $f(x) = \sin x$, uitilizzando quale punto iniziale $x_0 = 3$. La successione che si ottiene, definita per ricorrenza è la seguente:

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases} .$$

Applicando tali definizioni otteniamo: $x_0 = 3$, $x_1 \sim 3.142546543$, $x_2 \sim 3.141592653$, che come era prevedibile è una buona approssimazione di $\pi$, valore verso il quale converge la successione definita.

7.

$$\left( \begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(n-k)}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{k+1} = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{n-k}{k+1}.$$

8. Indichiamo con $x$ il numero di uomini e con $y$ il numero di donne presenti alla festa. L'età complessiva degli uomini è $26x$, mentre l'età complessiva delle donne è $19y$. L'età complessiva delle persone presenti alla festa è pari a $26x + 19y$.

Dato che le persone presenti alla festa è pari a $x + y$ e la loro età media è 22, deve risultare anche:

$$22(x + y) = 26x + 19y, \; 4x = 3y, \; \frac{x}{y} = \frac{3}{4}.$$

9. *Il principio di Cavalieri afferma che dai due solidi ed un fascio di piani paralleli che secano i due solidi secondo superficie equivalenti, allora il volume dei due solidi è lo stesso.*

Il principio di Cavalieri può essere utilizzato per calcolare il volume della sfera, tramite quello della scodella di Galileo.

10. Quello riportato è l'enunciato del V postulato di Euclide come riportato nel primo libro degli Elementi. Per anni, fino alla fine del '700, molti matematici hanno cercato di dimostrare questa proposizione, considerandola una conseguenza degli altri postulati, cosa che non riusci. Molti proposero postulati equivalenti al quinto postulato, quale ad esempio il seguente: per un punto esterno ad una retta passa una ed una sola retta parallela, ritenendoli più evidenti. L'ultimo matematico che tentò di dimostrare il quinto postulato fù l'abate Saccheri, nel 1700, che può essere considerato, suo malgrado, l'iniziatore di un nuovo filone di indagine, ovvero può essere considerato lo scopritore delle geometrie non euclidee. Sostituendo il quinto postulato con altre proposizioni si perviene a nuove geometrie, coerenti e non contradditorie. Se assumiamo che per un punto esterno ad una retta passino due rette parallele, otteniamo una nuova geometria, detta geometria iperbolica, nella quale i triangoli hanno somma degli angoli interni inferiore a 180°. Se invece assumiamo che per un punto esterno ad una retta non passa alcuna parallela alla retta data, costruiamo una nuova geometria detta geometria ellittica, nella quale i triangoli hanno la somma degli interni maggiore a 180°. Da ricordare per i lavori proposti in questa direzione sono: Lobacievskij, Bolyai, Riemann, Poincaré, Gauss.

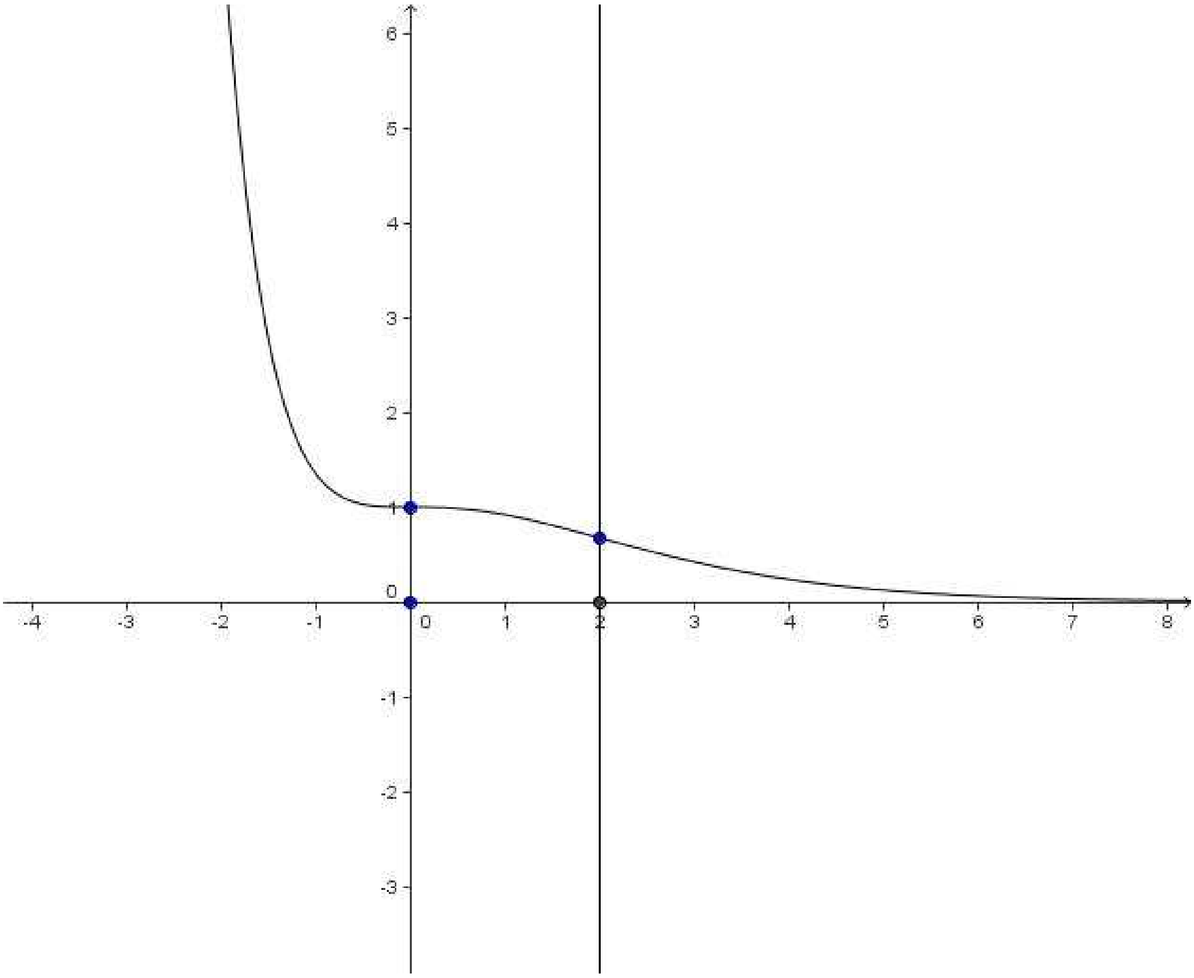


Figura 1: grafico della funzione problema 1

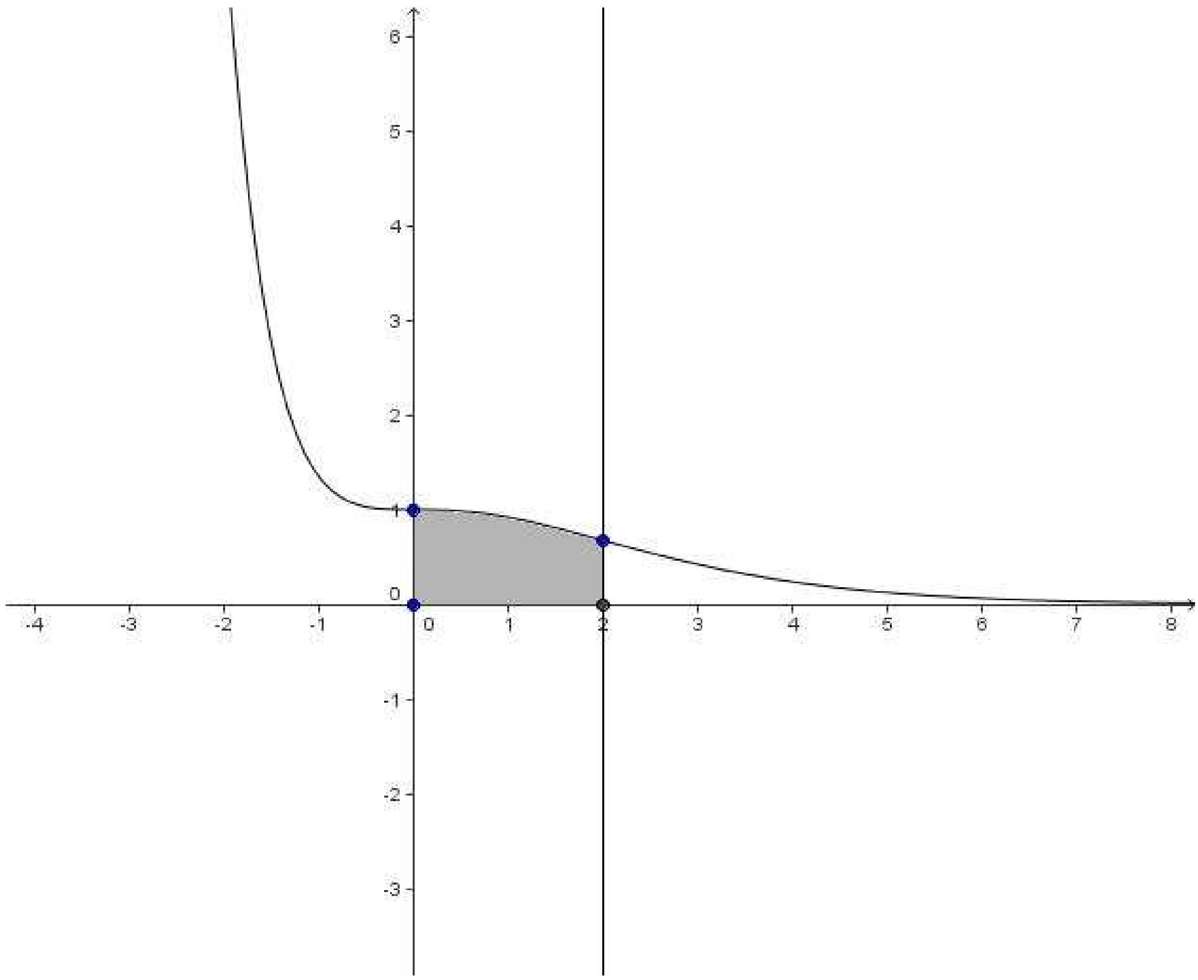


Figura 2: grafico della funzione problema 1

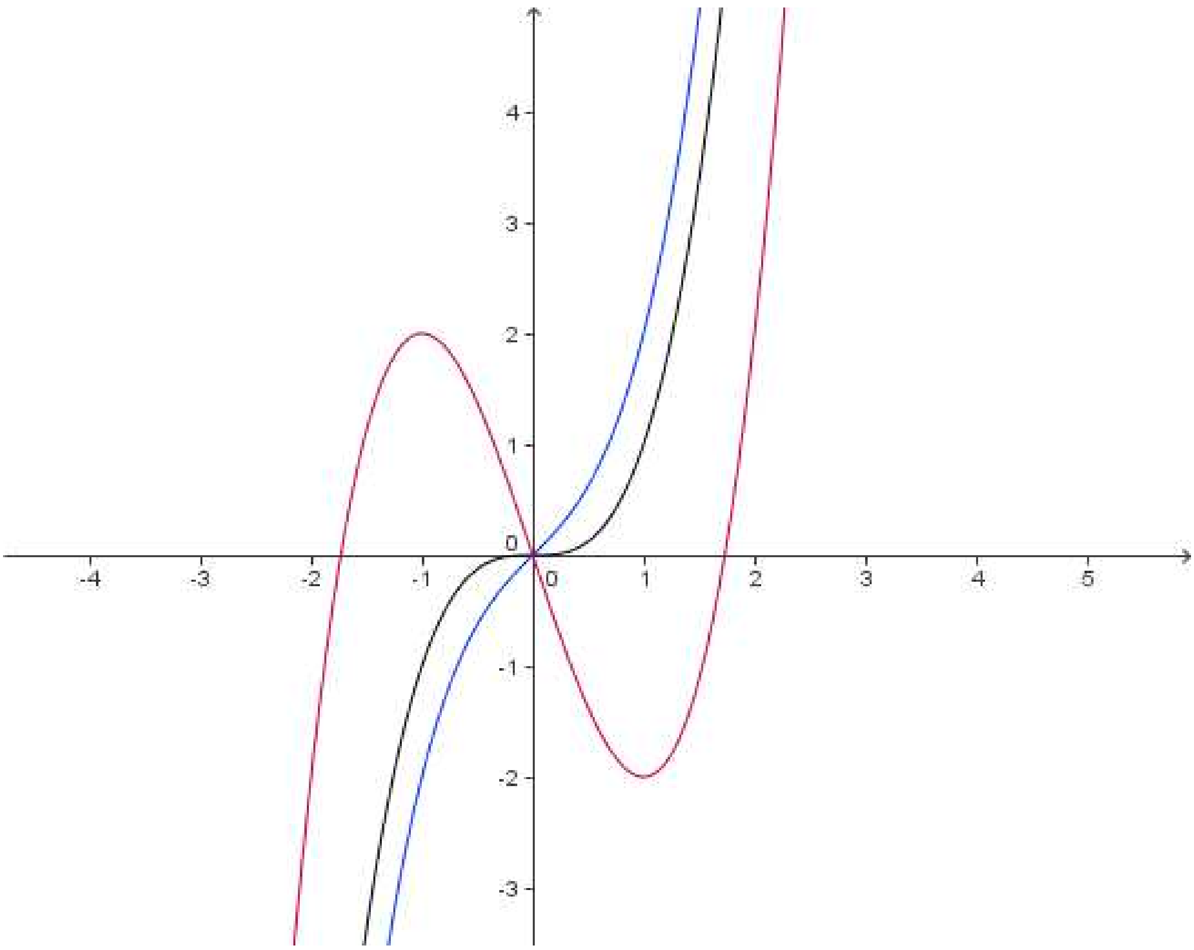


Figura 3: grafico delle funzioni problema 2